ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ АВТОНОМНАЯ НЕКОММЕРЧЕСКАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ

«ВОЛЖСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.Н. ТАТИЩЕВА» (ИНСТИТУТ)

кафедра «ПИ»

(наименование кафедры)

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по УР

_______________Т.Б. Исакова

от «_____»_________20__г.

Линейная алгебра

Учебно – методическое пособие по дисциплине

Математика

Тольятти 2018

УДК 512.2

Скрябина Е. С. Линейная алгебра. Учебно – методическое пособие по дисциплине «Математика». Тольятти: Волжский университет им. В.Н.Татищева, 2018, 34 с.

Библиогр. 4 назв.

Составители: ст. преподаватель Е.С. Скрябина

Рецензент к.ф-м.н. И.А.Каверина

Утверждено ученым советом ВУиТ

I. Краткие теоретические сведения и методические указания к решению типовых задач

1.1 Матрицы и определители

Матрицей размера $m\times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Основные операции над матрицами

1. **Умножение матрицы на число**. Произведением матрица A на число λ называется матрица $B = \lambda A$, элементы которой $b_{ij}=\lambda a_{ij}$ для $i = 1, 2, \ldots m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Например, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ то $4A=\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$.

2.Сложение матриц. Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m\times n$ называется матрица $C = A+B$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$, для $i = 1, 2, \ldots m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

3.**Вычитание матриц**.

Данная операция аналогична сложению: $C = A - B = A + (-1)\,B$.

4. **Умножение матриц**. Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы (матрица A называется согласованной с матрицей B).

Произведением матриц A и B называется матрица C, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i–й строки матрицы A на соответствующие элементы j–го столбца матрицы B.

Пример:

Вычислить $C = A\,B$, если

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&2&3\\3&2&1&2\\4&3&2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&-3&0\\2&5&1&2\\0&6&4&1\\6&-1&-1&5\end{pmatrix}$$

Решение:

$$C=A*B=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot2+3\cdot0+4\cdot6 & 1\cdot1+2\cdot5+3\cdot6+4\cdot(-1) & 1\cdot(-3)+2\cdot1+3\cdot4+4\cdot(-1) & 1\cdot0+2\cdot2+3\cdot1+4\cdot5\\ 2\cdot1+1\cdot2+2\cdot0+3\cdot6 & 2\cdot1+1\cdot5+2\cdot6+3\cdot(-1) & 2\cdot(-3)+1\cdot1+2\cdot4+3\cdot(-1) & 2\cdot0+1\cdot2+2\cdot1+3\cdot5\\ 3\cdot1+2\cdot2+1\cdot0+2\cdot6 & 3\cdot1+2\cdot5+1\cdot6+2\cdot(-1) & 3\cdot(-3)+2\cdot1+1\cdot4+2\cdot(-1) & 3\cdot0+2\cdot2+1\cdot1+2\cdot5\\ 4\cdot1+3\cdot2+2\cdot0+1\cdot6 & 4\cdot1+3\cdot5+2\cdot6+1\cdot(-1) & 4\cdot(-3)+3\cdot1+2\cdot4+1\cdot(-1) & 4\cdot0+3\cdot2+2\cdot1+1\cdot5\end{pmatrix}$$

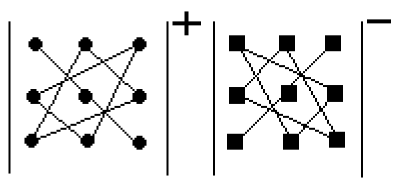
$$=\begin{pmatrix}29&25&7&27\\22&16&0&19\\19&17&-5&15\\16&30&-2&13\end{pmatrix}.$$

5.**Транспонирование матрицы** - переход от матрицы A к матрице A', в которой строки и столбцы поменялись местами.

Например, $A=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$, $A'=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$.

Определителем называется число, которое по определенному закону ставится в соответствие данной квадратной матрице.

Определитель матрицы третьего порядка удобно вычислять, пользуясь правилом треугольников:



Пример:

Вычислить определитель третьего порядка

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1) + 0\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot 2 - 3\cdot(-1)\cdot 2 - 2\cdot 3\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot(-1) = 9.$$

Теорема Лапласа: Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки или столбца на их алгебраические дополнения

$$|A| = \sum_{s=1}^{n} a_{sj} A_{sj} \ .$$

Пример:

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.

Решение:

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 * A_{11} + 1 * A_{12} + (-2) * A_{13} + 0 * A_{14} =$$

$$= (-1)^{1+1} * \begin{vmatrix} -6 & -2 & 5 \\ 0 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} * \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} - 2 * (-1)^{1+3} * \begin{vmatrix} 3 & -6 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (36 + 0 - 24 - 90 + 120 - 0) - (-18 + 25 - 16 - 60 - 60 - 2) - 2(0 + 15 - 48 - 0 - 36 - 6) = 323.$$

Для приведения определителя к треугольному виду вспомним свойства определителей:

- Если какая-либо строка или столбец матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен нулю
- Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число λ, то ее определитель умножится на это число.
- При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется
- При перестановке двух строк (столбцов) матрицы местами ее определитель меняет знак на противоположный.

- Если квадратная матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен нулю.
- Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю.
- Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна нулю.
- Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженных на одно и тоже число.
- Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей.
- Сумма произведений произвольных чисел $b_1, b_2, ..., b_n$ на алгебраические дополнения элементов любой строки (столбца) равна определителю матрицы, полученной из данной заменой элементов этой строки (столбца) на числа $b_1, b_2, ..., b_n$.

Приведем определитель к треугольному виду и вычислим его как произведение элементов, стоящих по главной диагонали:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & -2 & 0\\ 3 & -6 & -2 & 5\\ 1 & 0 & 6 & 4\\ 2 & 3 & 5 & -1\end{vmatrix} \begin{matrix}(-3)+ \quad (-1)+ \quad (-2)+\\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & -9 & 4 & 5\\ 0 & -1 & 8 & 4\\ 0 & 1 & 9 & -1\end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix}1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 8 & 4\\ 0 & -9 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 9 & -1\end{vmatrix} \begin{matrix}\\ (-9)+ \quad (1)+\\ \\ \\ \end{matrix} = -\begin{vmatrix}1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 8 & 4\\ 0 & 0 & -68 & -31\\ 0 & 0 & 17 & 3\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix}1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 8 & 4\\ 0 & 0 & 17 & 3\\ 0 & 0 & -68 & -31\end{vmatrix} \begin{matrix}\\ \\ (4)+\\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 8 & 4\\ 0 & 0 & 17 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -19\end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 17 \cdot (-19) = 323$$

Матрица A^{-1} называется *обратной по отношению к квадратной матрице А*, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

Алгоритм вычисления обратной матрицы

1. Находим определитель матрицы A, если $|A|=0$, то матрица A вырожденная и вычисления прекращаются. Если $|A| \neq 0$, то матрица A невырожденная и обратная матрица существует.

2. Находим транспонированную матрицу A'.

3. Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы A' и составляем из них присоединенную матрицу $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{12} & \dots & A'_{1n} \\ A'_{21} & A'_{22} & \dots & A'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A'_{n1} & A'_{n2} & \dots & A'_{nn} \end{pmatrix}$.

4. Обратную матрицу вычисляем по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}.$$

Проверяем правильность вычисления по определению $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Пример:

Найдите ранг матрицы А$=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

Решение:

Воспользуемся преобразованиями, сохраняющими ранг матрицы и приведем ее к треугольному виду

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & -4 & 7 \end{pmatrix}$~(элементы первой строки, умноженные на 1 прибавляем к соответствующим элементам второй строки) ~

~$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 11 & 10 & 8 \\ 3 & 6 & 10 & -4 & 7 \end{pmatrix}$~(элементы первой строки, умноженные на -3 прибавляем к соответствующим элементам третьей строки) ~

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 11 & 10 & 8 \\ 0 & -3 & -11 & -10 & -8 \end{pmatrix}$ ~(к элементам второй строки прибавляем соответствующие элементы третьей строки) ~

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 11 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Таким образом, наивысший порядок минора, отличного от нуля для данной матрицы равен двум, следовательно, ранг матрицы r(A)=2.

1.2 Системы линейных уравнений и элементы матричного анализа

Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

a_{ij} – коэффициенты при неизвестных, b_{ij}- свободные члены.

Запишем систему в матричной форме:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

A – матрица коэффициентов при неизвестных (основная матрица системы).

X – матрица-столбец неизвестных,

B – матрица - столбец свободных членов.

Метод обратной матрицы

Пусть в системе $m = n$. Предположим, что квадратная матрица системы $A_{n\times n}$ невырожденная, т. е. $|A| \neq 0$. В этом случае существует обратная матрица.

$$A^{-1}AX = A^{-1}B. \qquad A^{-1}A = E$$

$$X = A^{-1}B$$

Решением системы методом обратной матрицы будет матрица-столбец

$$X = A^{-1}B$$

Формулы Крамера

Теорема: Пусть Δ- определитель основной матрицы системы A, а Δ_j-определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j –го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \text{где } j = 1,2,\ldots,n$$

Метод Крамера достаточно трудоемок и пригоден только для решения квадратных неоднородных систем. В связи с чем более привлекательным представляется метод Гаусса.

Метод Гаусса (или метод исключения) при реализации его совместно с теоремой Кронекера-Капелли становится особенно привлекательным и эффективным в силу того, что:

- ✓ он позволяет находить все решения даже у прямоугольных систем;
- ✓ позволяет параллельно исследовать систему на совместность;
- ✓ всегда приводит к результату;
- ✓ существенно менее трудоемок, чем метод Крамера.

Основное требование, которое предъявляется при реализации метода Гаусса – навык сведения матрицы к треугольному виду.

Теорема Кронекера-Капелли: Для того, чтобы система линейных уравнений являлась совместной необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы системы был равен рангу расширенной:

$$r(A) = r(A_p).$$

Следствие 1. Если ранг матрицы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Следствие 2. Если ранг матрицы меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечно много решений.

Метод Гаусса:

Шаг 1. (прямой ход метода Гаусса) формируем расширенную матрицу системы.

Шаг 2. С помощью элементарных преобразований приводим матрицу к треугольному виду.

Элементарные преобразования

1. Перестановка двух уравнений системы местами.
2. Прибавление к одной строке матрицы другой, умноженной на одно и то же число, отличное от нуля.

3. Умножение уравнения системы на число $\lambda \neq 0$.

Шаг 3. Определяем ранг основной и расширенной матриц системы и по теореме Кронекера-Капелли делаем вывод о совместности или несовместности системы уравнений.

Шаг 4. (обратный ход метода Гаусса) находим все неизвестные системы, начиная с последнего.

Пример:

Исследовать систему уравнений на совместность и в случае совместности решить её:

а) методом Крамера;

б) методом Гаусса;

в) матричным методом (с помощью обратной матрицы).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$$

Решение:

Теорема Кронекера – Капелли: для того, чтобы линейная система уравнений являлась совместной необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы системы был равен рангу расширенной.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 8 \end{array}\right) \sim (-3)*(\textit{1 строку})+(\textit{2-й строке}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -11 & 0 & -11 \\ 2 & 7 & -1 & 8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim (-2)*(\textit{1строку})+(\textit{3-й строке}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -11 & 0 & -11 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \quad r_o=r_p=3.$$

Ранг основной матрицы равен рангу расширенной. Это означает, что система линейных уравнений является совместной.

а) Решим систему методом Крамера.

<u>Первым шагом</u> в реализации метода Крамера является вычисление *основного определителя* (определителя матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных), т.е. $|A|$.

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 5 + 21 + 12 + 10 - 21 + 6 = 33.$$

Второй шаг. Вычисляем последовательно столько определителей, сколько неизвестных имеет решаемое уравнение $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, ..., \Delta_n$, где нижний индекс указывает номер неизвестной ($x_1, x_2, ..., x_n$) для нахождения которой будет использоваться данный определитель. При этом номер определителя обозначает номер столбца в *основном определителе*, вместо которого должен быть выписан столбец свободных членов (при остающихся на своих местах остальных столбцах):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 20 + 7 + 48 + 40 - 84 + 2 = 33.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 24 + 24 - 2 - 24 + 12 = 33$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -40 + 84 + 4 + 40 - 7 - 48 = 33.$$

Третий шаг. Находим неизвестные x_1, x_2, x_3 по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

$$x_1 = \frac{33}{33} = 1; \qquad x_2 = \frac{33}{33} = 1; \qquad x_3 = \frac{33}{33} = 1.$$

Ответ: $x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 1.$

б) Решим систему методом Гаусса.

При решении системы линейных уравнений методом Гаусса (метод исключения) необходим навык сведения матрицы к ступенчатому виду.

Формируем расширенную матрицу системы и приводим её к треугольному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 8 \end{array}\right) \sim (-3)*(\textit{1 строку})+(\textit{2-й строке}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -11 & 0 & -11 \\ 2 & 7 & -1 & 8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim (-2)*(\textit{1строку})+(\textit{3-й строке}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -11 & 0 & -11 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$\sim\left(-\dfrac{1}{11}\right)$*(*2 строку*) $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$ ~ *(-3)*(2-ю строку)+(3-й строке)* ~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right).$$

Теперь систему уравнений можем переписать в виде:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ \quad x_2 \quad = 1, \\ \quad -3x_3 = -3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2 + x_3 = 4, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $x_1=1;\ x_2=1;\ x_3=1.$

в) Решим систему матричным методом.

Обозначим $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Тогда в матричной форме данная система уравнений имеет вид: $AX = B$, где A – известная матрица коэффициентов при неизвестных; B–матрица-столбец свободных членов, X–матрица-столбец искомых величин. Воспользуемся формулой: $X = A^{-1}B$.

Следовательно, для нахождения неизвестных величин необходимо вычислить матрицу, обратную основной матрице системы. Для этого воспользуемся алгоритмом приведенным выше.

1) $|A| = \Delta = 33$ (см. вычисления в *п. а*)).

2) $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 7 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$

3) $A_{11}' = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -16;$ $\quad A_{12}' = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 9;$ $\quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11;$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 9;$ $\quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3;$ $\quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0;$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = 31;$ $\quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -3;$ $\quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -11.$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix}.$$

4) $A^{-1} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix}$

$$X = A^{-1} * B = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} -64+9+88 \\ 36-3+0 \\ 124-3-88 \end{pmatrix} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} 33 \\ 33 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1=1;\ x_2=1;\ x_3=1$.

Пример Найти все базисные решения системы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$$

Решение: Исследуем систему на совместность:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -14 \end{pmatrix}$. Ранг основной матрицы равен рангу расширенной r(A)=r(A*)=2, следовательно, по теореме Кронекера – Капели система совместна. Так как ранг матрицы меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечно много решений.

Перепишем систему в виде:

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ -5x_2 - x_3 = -14. \end{cases}$, т.к. r=2, то система имеет две основные переменные и одну свободную.

1) переменные x_1, x_2 примем за основные, поскольку их базисный минор (определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных) отличен от нуля, тогда x_3- не основная или свободная переменная.

Выразим основные переменные через свободные:

$$x_2 = \frac{14}{5} - \frac{x_3}{5},\quad x_1 = \frac{7}{5}x_3 - \frac{3}{5}.$$

Придадим свободной переменной произвольное значение: пусть x_3=c, тогда $x_2 = \frac{14}{5} - \frac{c}{5},\quad x_1 = \frac{7}{5}c - \frac{3}{5}.$

2) переменные x_2, x_3 также можно принять за основные, тогда x_1 будет свободной переменной.

Выразим основные переменные через свободные:

$$\begin{cases}2x_2 - x_3 = 5 - x_1, \\ -5x_2 - x_3 = -14.\end{cases} \quad \begin{cases}7x_2 = 19 - x_1, \\ x_3 = 14 - 5x_2.\end{cases} \qquad \begin{cases}x_2 = \dfrac{19 - x_1}{7} \\ x_3 = \dfrac{3}{7} + \dfrac{5}{7}x_1\end{cases}$$

Придадим свободной переменной произвольное значение $x_1 = a$, тогда $x_2 = \dfrac{19-a}{7}$, $x_3 = \dfrac{3}{7} + \dfrac{5}{7}a$.

Ответ: 1) $x_1 = \dfrac{7}{5}c - \dfrac{3}{5}$. $x_2 = \dfrac{14}{5} - \dfrac{c}{5}$, $x_3=c$.

2) $x_1 = a, \quad x_2 = \dfrac{19-a}{7}, \quad x_3 = \dfrac{3}{7} + \dfrac{5}{7}a$

Пример Найти фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases}x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \quad = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 8x_4 \quad = 0.\end{cases}$$

Решение: Система линейных однородных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы коэффициентов при переменных меньше числа переменных.

Определение: Система линейно независимых решений $e_1, e_2, \ldots, e_k$ называется *фундаментальной*, если каждое решение системы линейных однородных уравнений является линейной комбинацией решений $e_1, e_2, \ldots, e_k$

Теорема: Пусть r – ранг однородной системы линейных уравнений с n неизвестными, причем (n<r), тогда эта система имеет фундаментальную систему решений, состоящую из (n-r) решений.

Найдем общее решение системы:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 8 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -14 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -21\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7\end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы равен трем r(A)=3.

Теперь систему уравнений перепишем в виде: $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0, \\ \quad x_2 \quad + x_4 - 14x_5 = 0, \\ \qquad\qquad 7x_5 = 0 \end{cases}$

тогда, $x_5 = 0$. Примем переменные x_1, x_2, x_5 за основные, так как определитель, составленный из коэффициентов при этих неизвестных, отличен от нуля, тогда переменные x_3, x_4 будут не основными или свободными.

Выразим основные переменные через свободные $\begin{cases} x_1 = -x_4 - 2x_3 \\ x_2 = -x_4, \\ x_5 = 0. \end{cases}$

Фундаментальная система решений будет состоять из двух решений (n-r).

Таким образом, придавая свободным переменным произвольные значения, получаем фундаментальную систему решений:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-2	0	1	0	0
-1	-1	0	1	0

***Пример* 4.1.** Определить собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\tilde{A}$, заданного матрицей: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

Решение: Составим характеристическое уравнение

$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$, откуда $\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$.

Решая данное уравнение, получим два корня: $\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 9.$

Найдем собственный вектор $x = (x_1, x_2)$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 4$. Для этого решаем матричное уравнение

$(A-\lambda E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0$, для нашего уравнения $\begin{pmatrix} 5-4 & 2 \\ 2 & 8-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ или $\begin{cases} x_1-2x_2=0, \\ 2x_1+4x_2=0. \end{cases}$

Второе уравнение является следствием первого. Из первого уравнения находим отношение координат собственного вектора $x_1:x_2=2:-1$. Получим собственный вектор x = (2; -1).

При $\lambda_1=9$ получим систему уравнений $\begin{pmatrix} 5-9 & 2 \\ 2 & 8-9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ или

$\begin{cases} -4y_1+2y_2=0, \\ 2y_1-y_2=0. \end{cases}$ откуда находим собственный вектор y = (y_1, y_2)=(1,2).

***Пример* 4.2.** Определить собственные значения и собственные векторы линейного оператора заданного матрицей: $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение: Характеристическое уравнение

$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0$ или $\lambda^3-12\lambda^2+36\lambda=0$, т.е. $\lambda(\lambda^2-12\lambda+36)=0$,

имеет корни $\lambda_1=\lambda_2=6, \lambda_3=0$ - собственные значения. Найдем координаты собственного вектора $\bar{x}=(x_1, x_2, x_3)$, соответствующего собственному значению $\lambda_3=0$ из уравнения в матричной форме $(A-\lambda E)\bar{x}=0$. Последнее уравнение запишем так: $\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0, \\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+a_{23}x_3=0, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+(a_{33}-\lambda)x_3=0. \end{cases}$

т.е. $\begin{cases} 5x_1-2x_2-x_3=0, \\ -2x_1+2x_2-2x_3=0, \\ -x_1-2x_2+5x_3=0. \end{cases}$ Отсюда находим координаты собственного вектора $x_1=1, x_2=2, x_3=1; \bar{x}=(1,2,1)$.

При $\lambda_1=\lambda_2=6$. уравнение $(A-\lambda E)\bar{y}=0$, (где $\bar{y}=(y_1, y_2, y_3)$ - собственный вектор) или $\begin{cases} (5-6)y_1-2y_2-y_3=0, \\ -2y_1+(2-6)y_2-2y_3=0, \\ -y_1-2y_2+(5-6)y_3=0. \end{cases}$ или $\begin{cases} -y_1-2y_2-y_3=0, \\ -2y_1-4y_2-2y_3=0, \\ -y_1-2y_2-y_3=0. \end{cases}$ сводится к одному уравнению $y_1 + 2y_2 + y_3 = 0$, поэтому координаты собственного вектора однозначно определить нельзя. Собственному значению $\lambda = 6$ соответствует бесчисленное множество неколлинеарных собственных векторов, перпендикулярных к вектору $\bar{x} = (1,2,1)$. Из этих векторов можно произвольным образом выбрать два ортогональных вектора. Например, в качестве $\bar{y}$ возьмем вектор с координатами $y_1 = 1, y_2 = -1, y_3 = 1$ (они удовлетворяют уравнению $y_1 + 2y_2 + y_3 = 0$). Тогда координаты собственного вектора $\bar{z} = (z_1, z_2, z_3)$, ортогонального $\bar{x}$ и $\bar{y}$ определяется уравнениями $z_1 + 2z_2 + z_3 = 0; z_1 * 1 + z_2 * (-1) + z_3 * 1 = 0$, откуда $z_1 = 1, z_2 = 0, z_3 = -1$.

И так, получено три взаимно перпендикулярных собственных вектора: $\bar{x} = (1,2,1); \bar{y} = (1,-1,1); \bar{z} = (1,0,-1);$

II. Упражнения

2. 1 Матрицы и определители

1. Найти матрицу *C*=*2A*+*5B* и *D*=-*A*-*2B*, если

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$ 2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix},$ 4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

2. Найти *AB*, если

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix};$ 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$

3) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & -3 \\ -7 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$ 4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & -3 \\ -7 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix};$

5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & -3 \\ -7 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix};$

6) $A=\begin{pmatrix} 101 & 106 & 130 \\ -102 & 107 & 129 \\ 103 & -108 & -128 \\ 104 & 109 & 127 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

7) $A=\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$; $\quad$ 8) $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Найти произведения AB и BA

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad$ 2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

;

3) $A=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad$ 4) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Найти значение матричного многочлена $2A^2+3A+5E$ при $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

если E- единичная матрица третьего порядка.

5. Вычислить матрицу $D=(AB)'-C^2$, где

$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathrm{C}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Вычислить определитель

1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$; $\quad$ 2) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$; $\quad$ 3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; $\quad$ 4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; $\quad$ 6) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; $\quad$ 7) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; $\quad$ 8) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$;

9) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; $\quad$ 10) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$; $\quad$ 11) $\begin{vmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; $\quad$ 12) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

7. Решить уравнение. Сделать проверку

1) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & x+1 & 0=-2 \\ x+1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & 1 \\ 1 & x+2 & 1=0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

8. Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы A'

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

9. Привести определитель к треугольному виду и вычислить его

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$.

10. Вычислить определитель, разложив его по элементам строки (столбца)

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

11. Найти матрицу, обратную данной.

1) $\text{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\text{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$,

4) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 5) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

12. Даны две матрицы А и В. Найти:

а) AB; б) BA; в) A^{-1}; г) $A\cdot A^{-1}$; д) $(A+B)^2-A^2-2AB-B^2$

1) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\ 8 & -7 & -6\\ -3 & 4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 3 & -5 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$. 2) $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -6\\ 2 & 4 & 3\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 8 & -5\\ -3 & -1 & 0\\ 4 & 5 & -3\end{pmatrix}$.

13. Найти ранг матрицы

1) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 6\\ 2 & 3 & 1 & 6\\ 3 & 1 & 2 & 6\end{pmatrix}$; 2) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8\\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$; 3) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 8 & 13 & 16\\ 1 & 0 & -7 & -14 & -17\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 3 & -1\\ 3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 5 & 1\end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 2 & 3\\ 1 & 10 & 3 & 6\\ 6 & 10 & 1 & 4\end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -2\\ 2 & -1 & -2 & -3\\ 3 & 2 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

2.2 Системы линейных уравнений и элементы матричного анализа

14. Проверить систему на совместность и в случае совместности решить ее:

1) методом Крамера;

2) методом обратной матрицы;

3) методом Гаусса

1) $\begin{cases}2x_1-4x_2+3x_3=1,\\ x_1-2x_2+4x_3=3,\\ 3x_1-x_2+4x_3=2.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=5,\\ 2x_1-x_2-x_3=1,\\ x_1+3x_2+4x_3=6.\end{cases}$

3) $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=2,\\ 3x_1+2x_2 2x_3=-2,\\ x_1-2x_2+x_3=1.\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=4,\\ 3x_1-5x_2+3x_3=1,\\ 2x_1+7x_2-x_3=8.\end{cases}$

5) $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=1,\\ -3x_1+x_2+2x_3=0,\\ x_1+4x_2+3x_3=2.\end{cases}$ 6) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=6,\\ 2x_1+3x_2-x_3=4,\\ 3x_1+x_2-4x_3=0.\end{cases}$

7) $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5,\\ x_1+x_2-x_3=0,\\ 4x_1-x_2+5x_3=3.\end{cases}$ 8) $\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=12,\\ x_1+2x_2+4x_3=6,\\ 5x_1+x_2+2x_3=3.\end{cases}$

9) $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=5,\\ x_1-2x_2+3x_3=-3,\\ 7x_1+x_2-x_3=10.\end{cases}$ 10) $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=-4,\\ x_1+3x_2-x_3=11,\\ x_1-2x_2+2x_3=-7.\end{cases}$

11) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1-3x_2+x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=5. \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0, \\ x_2+2x_3-x_4=2, \\ x_1-x_2-x_4=-1, \\ -x_1+3x_2-2x_3=0. \end{cases}$

13) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8, \\ -2x_1+2x_2-3x_3=-5, \\ 3x_1-4x_2+5x_3=10 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=1, \\ 3x_1+2x_2-2x_3=1, \\ x_1-x_2+2x_3=5 \end{cases}$

15. Найти базисные решения системы

1. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=5, \\ 2x_1-x_2+3x_3-4x_4=-13, \\ x_1-x_2+x_4=4. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-8x_4=-5, \\ -x_1+3x_3+5x_4=7, \\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4=-4. \end{cases}$

3. $\begin{cases} -x_1+x_2+2x_3-x_4=2, \\ 2x_1-x_2+3x_3-4x_4=3, \\ 3x_1-4x_2+x_4=5. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3-x_4=3, \\ 2x_1-x_2-4x_3+x_4=-3, \\ -x_1+x_2-5x_4=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1-x_2-x_3-x_4=0, \\ 2x_1-8x_2-3x_3+x_4=4, \\ 3x_1-x_2+5x_3-x_4=14. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} -x_1+2x_2-x_3+x_4=3, \\ 4x_1-x_2+x_4=0, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=3. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3-x_4=-4, \\ 2x_1+3x_2-4x_3+8x_4=11, \\ -5x_1+8x_2-x_3-x_4=7. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=3, \\ 3x_1-x_2+5x_3+2x_4=-2, \\ -x_1+x_2+2x_3-4x_4=-5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1-x_2-x_3-x_4=-5, \\ 4x_1-x_2+5x_3-x_4=18, \\ 3x_1+2x_2-3x_3+5x_4=-1. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+x_4=2, \\ 2x_1-x_2+5x_3-2x_4=-7, \\ 4x_1-x_2+x_3+3x_4=1. \end{cases}$

16. Определить собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей:

1. $A=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 2. $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 3. $A=\begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ 5. $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 6. $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \\ 8 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -8 & 2 & -5 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 2 & -8 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \\ -8 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -8 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & -6 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} -6 & -2 & 8 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

III. Задания для самостоятельной работы

3.1. Вычислить определитель третьего порядка:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 7. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ 10. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 11. $\begin{vmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ 12. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ 14 $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 15. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ 16. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ 18. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 19. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ 20. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 22. $\begin{vmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 23. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ 24. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -7 & 3 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ 26. $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 27. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ 28. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ 30. $\begin{vmatrix} 0 & -7 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

3. 2. а) Для данного определителя найти миноры элементов a_{i2}, a_{3j}

б) вычислить определитель, разложив его по элементам строки (столбца)

в) привести определитель к треугольному виду и вычислить его.

1 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ i=4; j=1

2 $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ i=3; j=3

3 $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ i=4; j=1

4 $\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$ i=1; j=3

5 $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ i=2; j=5

6 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ i=1; j=2

7 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ i=2; j=3

8 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ i=3; j=1

9 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ i=4; j=3

10 $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ i=4; j=4

11 $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$ i=3; j=4

12 $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ i=1; j=4

13 $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ i=2; j=4

14 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ i=1; j=3

15 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ i=3; j=2

16 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -6 & 1 \end{vmatrix}$

i=3; j=1

17 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

i=2; j=4

18 $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

i=2; j=3

19 $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

i=3; j=2

20 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

i=1; j=2

21 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

i=3; j=2

22 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

i=1; j=3

23 $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

i=3; j=1

24 $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

i=2; j=2

25 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

i=4; j=1

26 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

i=3; j=4

27 $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$

i=1; j=

28 $\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

i=2; j=2

29 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

i=4; j=4

30 $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

i=1;j=2

3. 3. Решить уравнение. Сделать проверку.

1. $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & x+1 & 0 \\ x+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$

3. $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

4. $\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -3 \\ 1 & x+4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & x+1 & 4 \\ 1 & 2 & x+4 \end{vmatrix} = 0$ 6. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & x-1 & x-1 \\ x+2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$

7. $\begin{vmatrix} y & -1 & 1 \\ 1 & y+1 & 1 \\ 2+y & -1 & 3 \end{vmatrix} =0$ 8. $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 2 \\ 2x+1 & 1 & x+3 \end{vmatrix} =0$ 9. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & y+4 & 1 \\ y-1 & 3 & 2 \end{vmatrix} =0$

10. $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ 3 & x-1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =0$ 11. $\begin{vmatrix} x+2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ x-2 & 0 & x-2 \end{vmatrix} =0$ 12. $\begin{vmatrix} y & 4 & 2 \\ 1 & y+1 & 0 \\ y-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =0$

13. $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ 2 & x+2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =0$ 14. $\begin{vmatrix} y & y & -2 \\ 1 & y+5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =0$ 15. $\begin{vmatrix} 0 & z+1 & z-3 \\ 0 & z+1 & 3 \\ 1 & 2 & z+3 \end{vmatrix} =0$

16. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & y-1 & y-2 \\ y+2 & -1 & -y-1 \end{vmatrix} =0$ 17. $\begin{vmatrix} y-1 & 0 & 1 \\ y-2 & y+2 & 1 \\ y+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =0$ 18. $\begin{vmatrix} 2x-1 & 3 & 3 \\ x & 2 & 2 \\ 2x+1 & 1 & x+3 \end{vmatrix} =0$

19. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & y+3 & 1 \\ y-1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =0$ 20. $\begin{vmatrix} z-1 & 2 & 0 \\ 3 & z-1 & 3 \\ 4 & z & 4 \end{vmatrix} =0$ 21. $\begin{vmatrix} z-1 & 0 & 1 \\ 0 & z-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =0$

22. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & k+1 & 0 \\ k & 2 & 1 \end{vmatrix} =0$ 23. $\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 2 \\ 4 & x+2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =0$ 24. $\begin{vmatrix} y & 2y+5 & -1 \\ 2 & y+5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} =0$

25. $\begin{vmatrix} 1 & z+1 & -z \\ 1 & z+1 & z \\ 1 & 2 & z+3 \end{vmatrix} =0$ 26. $\begin{vmatrix} x+4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ x+6 & 1 & x+1 \end{vmatrix} =0$ 27. $\begin{vmatrix} 2y & 2 & 4 \\ y+2 & y+2 & 1 \\ y+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =0$

28. $\begin{vmatrix} 2x-1 & 3 & 4-2x \\ x & 2 & 2-x \\ 2x & 1 & 2-x \end{vmatrix} =0$ 29. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & x+3 & 1 \\ x+2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =0$ 30. $\begin{vmatrix} x+3 & 2+x & 4 \\ 3 & x-1 & 3 \\ 4 & x & 4 \end{vmatrix} =0$

3. 4. Вычислить произведение матриц AB, если

1) $A=\begin{pmatrix} 5 & -29 & -52 & 46 \\ -15 & 97 & 8 & -112 \\ 38 & -4 & 69 & 85 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 2) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 83 & -29 & -52 & 46 \\ 7 & 97 & 78 & 3 \\ 38 & -4 & 6 & 85 \end{pmatrix}$.

3) $A=\begin{pmatrix}2&2&-3&-3\\-7&-2&1&2\\-1&2&1&1\\2&-2&-3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. 4) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&2&-3&-3\\2&-2&-2&2\\-1&2&1&1\\2&-2&-3&4\end{pmatrix}$.

5) $A=\begin{pmatrix}7&8&5&-3\\2&9&13&11\\-4&14&-8&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$. 6) $A=\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&1&-5&1\\3&100&-17&-10\\-2&13&-9&7\\9&23&0&8\end{pmatrix}$.

7) $A=\begin{pmatrix}2&1&12&5\\2&4&10&-60\\-3&-8&-4&7\\0&-3&5&8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$. 8) $A=\begin{pmatrix}0&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&11&1&-2\\9&4&3&4\\-3&5&5&8\\8&12&7&-9\end{pmatrix}$.

9) $A=\begin{pmatrix}1&-1&7&-11\\-2&6&-8&12\\3&-6&9&10\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$. 10) $A=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&2&-3&2\\1&1&5&12\\-3&0&9&1\end{pmatrix}$,

11) $A=\begin{pmatrix}1&8\\2&1\\3&-4\\1&-9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-2&0&-4\\9&0&-7&-5\end{pmatrix}$. 12) $A=\begin{pmatrix}1&-4&3\\3&0&3\\5&8&-12\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

13) $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&7&1\\3&2&-9&-3\\3&-3&1&-2\\8&5&-1&0\end{pmatrix}$. 14) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&2&2\\-1&2&-4&0\\6&-5&1&-3\\-3&4&0&2\end{pmatrix}$.

15) $A=\begin{pmatrix}1&-2\\3&1\\-4&5\\4&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&3&4\\0&-1&5&-1\end{pmatrix}$. 16) $A=\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3&2&2&1\\9&0&19&2\\6&13&-4&0\end{pmatrix}$,

17) $A=\begin{pmatrix}2&3&7&0\\-4&3&11&9\\8&-6&-4&8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$. 18) $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&0\\3&-1&2\\5&-3&1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

19) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8 & 8 & -4 & -9\\ 4 & 0 & 1 & 1\\ -9 & 1 & 2 & 20\\ 5 & -3 & 4 & -5\end{pmatrix}$. 20) $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 8 & -9\\ -4 & 5\\ 0 & 12\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -4 & -2\\ 5 & 1 & 9 & -11\end{pmatrix}$.

21) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 12 & 11\\ 5 & 4 & -13\\ -4 & 0 & 2\\ -11 & -2 & 3\end{pmatrix}$. 22) $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 0 & 2\\ -4 & -2 & 1 & -13\\ 8 & 1 & -9 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

23) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 2 & 2 & 2\\ -3 & 0 & 12\\ 4 & 1 & 17\end{pmatrix}$. 24) $A=\begin{pmatrix}1 & 8\\ -12 & 4\\ 15 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 3 & 13\\ -4 & 4 & 21 & 1\end{pmatrix}$.

25) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 6 & -17\\ 8 & 1 & 14 & 13\\ -14 & 0 & 1 & 3\\ -2 & -3 & -29 & 2\end{pmatrix}$. 26) $A=\begin{pmatrix}12 & 14 & 0\\ 2 & -17 & 21\\ 17 & 1 & 2\\ 19 & 4 & 19\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

27) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 17 & 21\\ 2 & 4 & 2 & -3\\ -4 & -12 & -30 & 12\\ 8 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$. 28) $A=\begin{pmatrix}22 & 4 & 5\\ 1 & -80 & 99\\ -35 & 4 & 2\\ 17 & 13 & 13\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$.

29) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 90 & 1\\ 2 & 5 & 0\\ 3 & -2 & 82\\ -17 & 12 & 1\end{pmatrix}$. 30) $A=\begin{pmatrix}12 & 3 & 130\\ -102 & 1 & 5\\ 1 & -108 & -128\\ 1 & 109 & 127\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

3.5. Даны две матрицы А и В. Найти:

а) АВ; б) ВА; в) A^{-1}; г) $A\cdot A^{-1}$; д) $(A+B)^2-A^2-2AB-B^2$.

1. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -3\\ 4 & 2 & -6\\ -3 & 4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$. 2. $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -6\\ 2 & 6 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 2 & -5\\ 3 & -1 & 0\\ 4 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 1 & -6\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$. 4. $A=\begin{pmatrix}-6 & 1 & 11\\ 5 & 1 & 5\\ 0 & 3 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix}3&1&2\\-1&0&2\\7&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&1&1\\3&7&1\end{pmatrix}$. 6. $A=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&3&-1\\4&1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2&-1\\3&1&2\\5&3&0\end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix}6&7&3\\3&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0&5\\4&-1&-2\\4&3&7\end{pmatrix}$. 8. $A=\begin{pmatrix}-2&3&4\\3&-1&-4\\-1&2&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&3&1\\0&6&2\\1&9&2\end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix}1&7&3\\-4&9&4\\0&3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&5&2\\1&9&2\\4&5&2\end{pmatrix}$. 10. $A=\begin{pmatrix}2&6&1\\1&3&2\\0&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&-3&2\\-4&0&5\\3&2&-3\end{pmatrix}$.

11. $A=\begin{pmatrix}6&9&4\\-1&-1&1\\10&1&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&4&3\\0&5&2\end{pmatrix}$. 12. $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\3&1&7\\2&1&8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&5&4\\-3&0&1\\5&6&-4\end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix}5&1&-2\\1&3&-1\\8&4&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&5&5\\7&1&2\\1&6&0\end{pmatrix}$. 14. $A=\begin{pmatrix}2&2&5\\3&3&6\\4&3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&3&3\\1&-2&-1\end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix}1&-2&5\\3&0&6\\4&3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&3&3\\1&-2&-1\end{pmatrix}$. 16. $A=\begin{pmatrix}5&4&2\\1&2&4\\3&0&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&4&-5\\3&-7&1\\1&2&2\end{pmatrix}$.

17. $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\4&3&2\\2&2&-7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&7&0\\5&3&1\\1&-6&1\end{pmatrix}$. 18. $A=\begin{pmatrix}8&-1&-1\\5&-5&-1\\10&3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2&5\\3&2&1\\1&0&2\end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix}3&-7&2\\1&-8&3\\4&2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&5&-3\\2&4&1\\2&1&-5\end{pmatrix}$. 20. $A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\3&5&15\\4&-7&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&-8&5\\3&0&2\end{pmatrix}$.

21. $A=\begin{pmatrix}2&-1&-4\\4&-9&3\\2&-7&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&-4\\5&-6&4\\7&-4&1\end{pmatrix}$. 22. $A=\begin{pmatrix}8&5&-1\\1&5&3\\1&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&-7&-6\\3&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$.

23. $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-4&1\\4&-3&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&-4\\2&5&-3\\4&-3&2\end{pmatrix}$. 24. $A=\begin{pmatrix}5&-8&-4\\7&0&-5\\4&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&5&5\\1&2&1\\2&-1&-3\end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 4\\ 3 & -5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 5 & 1\\ 5 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$. 26. $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 2\\ 1 & -5 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ 1 & 3 & 2\\ -4 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

27. $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 0\\ 4 & 5 & 1\\ 2 & 3 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 0 & 2 & 6\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$. 28. $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & -3\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 5 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

29. $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 7\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$ 30. $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -4\\ 2 & -4 & 6\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & 5 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

3. 6. Найти ранг матрицы

1. $\begin{pmatrix}8 & 2 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5\\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix}1 & 7 & 7 & 9\\ 7 & 5 & 1 & -1\\ 4 & 2 & -1 & -3\\ -1 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix}4 & 1 & 7 & -5 & 1\\ 0 & -7 & 1 & -3 & -5\\ 3 & 4 & 5 & -3 & 2\\ 2 & 5 & 3 & -1 & 3\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}8 & -4 & 5 & 5 & 9\\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7\\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1\\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5\end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix}-6 & 4 & 8 & -1 & 6\\ -5 & 2 & 4 & 1 & 3\\ 7 & 2 & 4 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 8 & -7 & 6\\ 3 & 2 & 4 & -5 & 3\end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix}77 & 32 & 6 & 5 & 3\\ 32 & 14 & 3 & 2 & 1\\ 6 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 5 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 2 & -1 & 1\\ 12 & 9 & 8 & -7 & 3\\ -12 & -5 & -8 & 5 & 1\end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix}1 & -3 & -3 & -14\\ 2 & -6 & -3 & -1\\ 3 & -9 & -5 & -6\end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix}3 & -6 & -1 & 4\\ 1 & -2 & -3 & 7\\ 2 & -4 & -14 & 31\end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ 3 & 7 & 2\end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 6\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix}2 & 3 & 5 & 10\\ 3 & 7 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$

3. 7. Найти матрицу, обратной данной

1. $\begin{pmatrix}a-2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ a^2-3 & 0 & a+2\end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix}1-a & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ a^2 & 0 & a+1\end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix}a^2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ a^2-1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} a-2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a^2-5 & 2 & a+2 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a^2-1 & 1 & a^2 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} a+3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a^2-8 & -1 & a-3 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} a+1 & -1 & a^2-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a-2 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} a+1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ a^2 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} a^2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a^2-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a^2+1 \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} a-3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a^2-10 & -1 & a+3 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} a^2-3 & -1 & a^2-4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a-3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ 14. $\begin{pmatrix} 3-a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a^2-8 & -1 & a+3 \end{pmatrix}$ 15. $\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} a-1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ a^2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$ 17. $\begin{pmatrix} a-1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a+1 \end{pmatrix}$ 18. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a^2+1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-a & 1-3a & a \end{pmatrix}$ 20. $\begin{pmatrix} -a-1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1-a \end{pmatrix}$ 21. $\begin{pmatrix} a^2-1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} a^2+1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3a^2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 23. $\begin{pmatrix} a^2-3 & -1 & a^2-4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 24. $\begin{pmatrix} a-1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ a^2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} a-1 & 3 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ a & 0 & a+1 \end{pmatrix}$ 26. $\begin{pmatrix} 3-a & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a^2-8 & -1 & 3+a \end{pmatrix}$ 27. $\begin{pmatrix} a & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a-1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} -a-1 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ a^2 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$ 29. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a-1 & 3a-1 & -a \end{pmatrix}$ 30. $\begin{pmatrix} a-1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. 8. Исследовать систему на совместность и в случае совместности решить ее:

а) методом Крамера,

б) матричным методом,

в) методом Гаусса.

1. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2, \\ 2x_1+x_2-x_3=2, \\ 3x_1-x_2+5x_3=8. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x_1+4x_2-8x_3=1, \\ 2x_1-3x_2+8x_3=4, \\ 3x_1+x_2+2x_3=7. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3=-4, \\ -3x_1+2x_2+x_3=-10, \\ 2x_1-5x_2+x_3=16. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4, \\ -4x_1+2x_2+x_3=17, \\ 2x_1+14x_2+3x_3=25. \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=-5, \\ -3x_1+x_2+2x_3=2, \\ 4x_1+x_2-2x_3=1. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=2, \\ -5x_1+x_2+3x_3=-9, \\ 2x_1+x_2+x_3=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3=-7, \\ -2x_1+4x_2-x_3=-3, \\ 4x_1+2x_2+3x_3=-17. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} x_1+8x_2-2x_3=-9, \\ 10x_1+2x_2+x_3=9, \\ x_1-70x_2-62x_3=9. \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=-5, \\ -4x_1+x_2+5x_3=6, \\ 2x_1-5x_2+x_3=4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} -x_1+2x_2+3x_3=-3, \\ 2x_1+4x_2=-2, \\ x_1-x_2+x_3=2. \end{cases}$ **11.** $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=-5, \\ -2x_1+3x_2+5x_3=9, \\ 8x_1+4x_2+x_3=-15. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=2, \\ 2x_1+3x_2-x_3=6, \\ 4x_1+2x_2+3x_3=14. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3=-4, \\ -3x_1+2x_2+x_3=-10, \\ 2x_1-5x_2+x_3=16. \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=-11, \\ -3x_1+x_2+x_3=2, \\ -4x_1-x_2+2x_3=8. \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-2, \\ 2x_1-3x_2+x_3=6, \\ -4x_1-x_2+2x_3=-1. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-4x_3=7, \\ -4x_1+x_2-x_3=7, \\ 2x_1-4x_2+8x_3=-14. \end{cases}$ **17.** $\begin{cases} -3x_1+x_2-x_3=-2, \\ 3x_1+4x_2-8x_3=-20, \\ 6x_1+3x_2+17x_3=54. \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=-2, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=15, \\ -2x_1-3x_2+4x_3=-13. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=5, \\ -6x_1+2x_2-5x_3=-16, \\ 3x_1+2x_2-x_3=1. \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} 4x_1-x_2=-6, \\ 3x_1+2x_2+5x_3=-14, \\ x_1-3x_2+4x_3=-19. \end{cases}$ **21.** $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=14, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=-16, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=-8. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3, \\ 2x_1-2x_3=0, \\ 3x_1-x_2+5x_3=7. \end{cases}$ **23.** $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3, \\ 2x_1-2x_2+3x_3=15, \\ -x_1+2x_2-4x_3=-16. \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=7, \\ -x_1-2x_2+8x_3=4, \\ 2x_1-x_2-x_3=-3. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -6, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 5. \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 14, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$ **27.** $\begin{cases} x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 32, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ -x_1 + 9x_2 + 7x_3 = 28. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$ **29.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = -6. \end{cases}$

3. 9. Найти все базисные решения системы:

1. $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = -2, \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 8x_4 = 30, \\ 6x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 13, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -3, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = -13, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_4 = 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 4x_3 - 8x_4 = -13, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 14, \\ -x_1 + x_2 - 2x_4 = -3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 8x_4 = 17, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -18, \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = -2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = -5, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = -4, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 12, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -7, \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -7, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ -3x_1 - 8x_2 + 13x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -4, \\ 3x_1 + 8x_2 - 12x_3 + x_4 = 19. \end{cases}$

13. $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 5x_3 - 10x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 15x_3 - x_4 = -5, \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 - 9x_4 = -17. \end{cases}$

14. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 8x_4 = 3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -12, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 1, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

16. $\begin{cases} -3x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = -7, \\ 12x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 12, \\ 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 8. \end{cases}$

$$17.\ \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_4 = 6, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 8x_4 = -13. \end{cases} \qquad 18.\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -10, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 16. \end{cases}$$

$$19.\ \begin{cases} x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - 8x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_4 = 4. \end{cases} \qquad 20.\ \begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ -2x_1 + 3x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 7. \end{cases}$$

3.10. Определить собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей:

1. $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ 3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 5. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 6. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} -6 & -8 & 2 \\ -5 & 2 & 8 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -8 \\ -8 & -6 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

IV. Вопросы

1. Матрицы и операции над ними. Пример
2. Определители 2-го и 3-го порядков. Правило Сарруса. Пример.
3. Минор и алгебраическое дополнение. Разложение определителя по строке / столбцу /.
4. Обратная матрица. Теорема о существовании обратной матрицы. Алгоритм вычисления обратной матрицы
5. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матрицы. Базисный минор.
6. Основные понятия и определения СЛУ: однородность, совместность, определенность. Запись СЛУ в матричной форме.
7. Система линейных уравнений. Метод обратной матрицы. Пример
8. Формулы Крамера. Пример
9. Метод последовательных исключений Жордана-Гаусса.
10. Исследование систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.
11. Система линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений. Пример

Литература

1. Высшая математика для экономистов / под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, 2007.
2. Практикум по высшей математике для экономистов. Под редакцией Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ. 2007
3. Каверин С. В., Скрябина Е. С. Задачник по линейной алгебре. Учебно-методическое пособие по дисциплине «Алгебра и геометрия»- Тольятти: Волжский университет им. В.Н.Татищева, 2009, 41 с.
4. С. В. Каверин, Е. С. Скрябина. Математика (Общий курс. Часть I). Учебно – методическое пособие - Тольятти: Волжский университет им. В.Н.Татищева, 2007 – 53 с.